

令和6年度前期日程入学試験問題

数 学 *D*

工 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、3ページ(表紙、白紙を除く)です。試験開始後、確認しなさい。
- ③ 解答は、別紙の解答用紙の表面に記入しなさい。裏面に記入してはいけません。
解答用紙の裏面に解答しても、その部分は採点しません。
- ④ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。
- ⑤ 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示しなさい。

数 学 D

1 以下の各問に答えよ。ただし、対数は自然対数である。

(1) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (n-k)^2$$

(2) 次の定積分を求めよ。

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x \cos x \, dx$

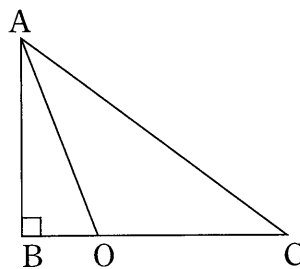
(ii) $\int_1^2 x \cdot 2^{x-1} \, dx$

(3) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^3}$ ($x > 0$) の増減, 極値を調べよ。

2

以下の各問に答えよ。

- (1) 集合 A を $A = \{2m + 3n \mid m, n \text{ はともに整数}\}$ と定める。このとき、 $1 \in A$ と $1 \notin A$ のどちらが正しいか、理由を付けて答えよ。
- (2) 下図の三角形 ABC において、 $BC = 7$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ とする。辺 BC 上に $BO = 2$ となる点 O をとる。このとき、内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ を求めよ。



- (3) $U = \{x \mid x \text{ は実数}\}$ を全体集合とし、 U の部分集合 P 、 Q をそれぞれ、
- $$P = \{x \mid x < -1 \text{ または } x > 2\}$$
- $$Q = \{x \mid x^2 - (k + 1)x + k > 0\}$$
- とする。ただし、 k は実数の定数とする。
- (i) P の補集合 \bar{P} を求めよ。答えの根拠となる理由も述べること。
- (ii) $P \subset Q$ が成り立つように、定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

3 三角形 OAB において、 $OA = \sqrt{5}$ 、 $OB = \sqrt{2}$ とする。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を C とおくと $OC = 1$ であった。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ として、以下の各問に答えよ。

- (1) \vec{c} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (3) 内積 $\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ を求めよ。
- (4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。

4 複素数 z は $z^7 = 1$ かつ $z \neq 1$ を満たすとする。 z と共役な複素数を \bar{z} で表すとき、以下の各問に答えよ。

- (1) $z\bar{z}$ の値を求めよ。
- (2) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ。
- (3) $z^6 = \bar{z}$ が成り立つことを示せ。
- (4) $\frac{z + \bar{z}}{2} = t$ とおく。 $2t^3 + t^2 - t$ の値を求めよ。