令和6年度後期日程入学試験問題

数　　学　*C*

理　　学　　部

注 意 事 項

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，3ページあります(表紙，白紙を除く)。

③ 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

④ 問題は，$\boxed{1}$から$\boxed{3}$まで3問あります。すべてに解答しなさい。

⑤ 解答は，解答用紙(別紙，計3枚)に記入しなさい。

⑥ 解答用紙の指定の欄に，受験番号を記入しなさい。

⑦ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

数　学　C

1　AB ＝ AC である△ABC で，その内接円の半径が 1 であるものを考える。$\angle \mathrm{BAC} = 2\theta$ とする。△ABC を直線 BC を軸にして 1 回転してできる立体の体積を $V(\theta)$ とする。以下の各問に答えよ。

(1)　辺 BC の中点を M とする。AM を $\sin\theta$ を用いて表せ。

(2)　$V(\theta)$ を求めよ。

(3)　$V(\theta)$ の最小値，およびそのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

2 $0 < p < 1$，$q > 1$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1+x)^p < 1 + x^p$$

(2) $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a+b)^p < a^p + b^p$$

(3) $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a+b)^q \leqq 2^{q-1}(a^q + b^q)$$

(4) $\alpha < \beta$ とする。関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続で，常に $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるとする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\left(\int_\alpha^\beta \{f(x)+g(x)\}^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left(\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta \{g(x)\}^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

3 A，B，Cの3人が得点を競って勝者を決めるゲームを行う。はじめは全員の得点はすべて0点とする。次の規則でA，B，Cが順にさいころを投げて，3人のいずれかが得点することを繰り返す。3人の中の最多得点と最少得点の点差が2点になったとき，最多得点の人を勝者としてゲームは終了する。

規則：1個のさいころを1回投げて出た目によって，それが3以下ならばAが1点を得る。出た目が4または5ならばBが1点を得る。出た目が6ならばCが1点を得る。

さいころを投げる回数が n 回以下で，Aが勝者となる確率を P_n，Bが勝者となる確率を Q_n，Cが勝者となる確率を R_n とする。ただし，n は自然数とする。以下の各問に答えよ。

(1) P_2, Q_2, R_2 を求めよ。

(2) P_3, Q_3, R_3 を求めよ。

(3) P_{3k}, Q_{3k}, R_{3k} を求めよ。ただし，k は自然数とする。また，極限値

$$\lim_{k \to \infty} P_{3k},\quad \lim_{k \to \infty} Q_{3k},\quad \lim_{k \to \infty} R_{3k}$$

を求めよ。